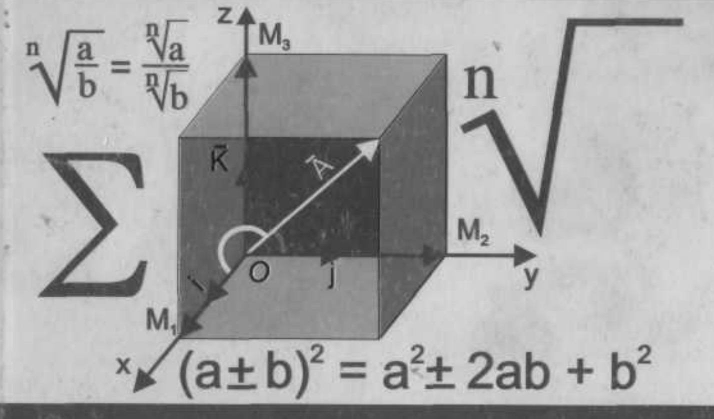
КАРМАННЫЙ СПРАВОЧНИК

А. Е. ЦИКУНОВ

СБОРНИК ФОРМУЛ ПО МАТЕМАТИКЕ



ПИТЕР

А. Е. Цикунов

Сборник математических формул

Под ред. докт. физ.-мат. наук, проф. В. И. Довнорович

Серия «Карманный справочник»

Сборник содержит формулы элементарной высшей математики — арифметики и алгебры, геометрии и тригонометрии, векторной и линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, рядов, теории вероятности и др. Он адресован школьникам и абитуриентам, студентам высших и средних специальных учебных заведений, преподавателям и инженерам.

ISBN 5-88782-281-3

ЗАО «Питер Бук».
196105, Санкт-Петербург, Благодатная ул., д. 67.
Лицензия ИД № 01940 от 05.06.00.
Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953000 – книги и брошюры.
Подписано в печать 06.11.01. Формат 60×88¹/₁₆. Усл. п. л. 4,9.
Доп. тираж 15 000 экз. Заказ № 2038.
Отпечатано с фотоформ в ФГУП «Печатный двор»
Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

Содержание

Некоторые обозначения

$=$ равно
$\neq$ не равно
$\approx$ приближенно равно
$>$ больше
$<$ меньше
$\geqslant$ больше или равно
$\leqslant$ *меньше или равно*
$!$ факториал
Δ треугольник
$\angle$ угол
$\cup$ дуга
$\perp$ перпендикулярно
$\parallel$ параллельно
$\backsim$ подобно
$^\circ$ градус
$'$ минута
$''$ секунда
∞ бесконечность
$\sum$ сумма
$|a|$ абсолютное значение (модуль) числа a

I. АРИФМЕТИКА

1. Признаки делимости

На 2 делится число, если его последняя цифра четная.

На 4 делится число, если его последние две цифры образуют число, делящееся на 4.

На 3 делятся те числа, у которых сумма цифр делится на 3; на 9 — те, у которых сумма цифр делится на 9.

На 5 делятся числа, последняя цифра которых 5 или 0.

На 6 делятся числа, которые одновременно делятся на 2 и 3.

На 8 делится число, если три последние цифры его образуют число, делящееся на 8.

2. Средние величины

Средняя арифметическая

$$\text{ср. ар.} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Средняя геометрическая

$$\text{ср. геом.} = \sqrt[n]{a_1\ a_2\ \ldots\ a_n}.$$

Средняя гармоническая

$$\text{ср. гарм.} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

3. Извлечение квадратного корня из числа

$$\sqrt{8'50'30'56} = 2916$$

$$\begin{array}{rr|r}
 & & -4 \\
\hline
\times & 49 & -450 \\
 & 9 & 441 \\
\hline
\times & 581 & -930 \\
 & 1 & 581 \\
\hline
\times & 5826 & -34956 \\
 & 6 & 34956 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

4. Извлечение квадратного корня с нужной точностью

$$\sqrt{0{,}00'85'4} = 0{,}09241\ \ldots$$

$$\begin{array}{rr|r}
 & & -81 \\
\hline
\times & 182 & -440 \\
 & 2 & 364 \\
\hline
\times & 1844 & -7600 \\
 & 4 & 7376 \\
\hline
 & 1848 & 2240
\end{array}\quad \ldots \text{ и т. д.}$$

II. АЛГЕБРА

1. Действия над алгебраическими выражениями

Абсолютная величина числа

Если $a \geq 0$, то $|a| = a$; если $a < 0$, то $|a| = -a$.

Правила знаков при умножении и делении

$$\boxed{\begin{array}{c} + \cdot + = + \\ + \cdot - = - \\ - \cdot + = - \\ - \cdot - = + \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c} + : + = + \\ + : - = - \\ - : + = - \\ - : - = + \end{array}}$$

Действия над многочленами

$$(a + b + c)\,x = ax + bx + cx;$$

$$(a + b + c)(m + n) = a(m + n) +$$
$$+ b(m + n) + c(m + n) =$$
$$= am + an + bm + bn + cm + cn;$$

$$\frac{a + b + c}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}.$$

Действия над дробями

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Формулы сокращенного умножения и деления

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b +$$

$$+ \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1});$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Действия со степенями

$$a^m a^n = a^{m+n};$$

$$a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$(ab)^m = a^m b^m;$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m};$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0);$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Действия с корнями

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[nm]{a^m}}{\sqrt[nm]{b^n}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^x = \sqrt[n]{a^{mx}};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}};$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\frac{x}{\sqrt[n]{a}} = \frac{x\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a};$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\frac{x}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{x\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}.$$

2. Пропорции

Определение

$$a : b = c : d.$$

Основное свойство пропорции

$$ad = bc.$$

Нахождение членов пропорции

$$a = \frac{bc}{d}; \quad b = \frac{ad}{c}.$$

Производные пропорции

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a};$$

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d};$$

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{c + d}{c - d};$$

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c};$$

$$\frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d};$$

$$\frac{b}{a \pm b} = \frac{d}{c \pm d}.$$

3. Комплексные числа

Действия над комплексными числами

$$i = \sqrt{-1}; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1 \quad \text{и т. д.};$$

$$(a + bi) \pm (a' + b'i) = (a \pm a') +$$

$$+ (b \pm b')\, i;$$

$$(a + bi) + (a - bi) = 2a;$$

$$(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') +$$

$$+ (ab' + ba')\, i;$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2;$$

$$\frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\, i.$$

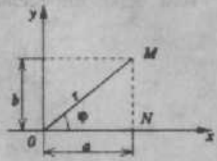
Геометрическое изображение комплексного числа

Точка M (a, b) изображает число $a + bi$ (рис. 1).

$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ — модуль комплексного числа;

$\varphi = \angle NOM = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$ — аргумент комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа



$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Рис. 1.

4. Решение уравнений

Уравнение первой степени

$$ax = b.$$

Решение

$$x = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0).$$

Система двух уравнений первой степени

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\}$$

Решение

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{aligned}\right\} \quad (a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0)$$

или через определители

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Квадратное уравнение

Общий вид неполного квадратного уравнения

$$ax^2 + c = 0.$$

Решение

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Общий вид полного квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$x^2 + px + q = 0;$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(x_1 и x_2 — корни трехчлена).

Решение

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(Если $b^2 = 4ac$, то корни действительные и равные; если $b^2 > 4ac$, то действительные и неравные; если $b^2 < 4ac$, то комплексно-сопряженные.)

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ;$$

$$x_1 + x_2 = -p = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 x_2 = q = \frac{c}{a}.$$

Квадратное уравнение с четным коэффициентом

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Решение

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Кубическое уравнение

Общий вид

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Канонический вид при $x = y - \frac{b}{3a}$

$$y^3 + py + q = 0,$$

где

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a};\quad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Решение по формуле Кардано

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} +$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Биквадратное уравнение

Общий вид

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Решение

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

5. Неравенства

Свойства неравенств

Если $a > b$, то $b < a$;
если $a > b$, то $a + c > b + c$;
если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$;
если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$;
если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Некоторые важные неравенства

$$|a + b| \leq |a| + |b|;$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0);$$

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2} \quad \begin{pmatrix} a > 0, \\ b > 0 \end{pmatrix};$$

$$\sqrt[n]{a_1, a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Неравенство первой степени

$$ax > b.$$

Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$; если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

Система неравенства первой степени

$$\left.\begin{matrix} x > a; \\ x > b. \end{matrix}\right\}$$

Если $a > b$, то $x > a$; если $a < b$, то $x > b$.

$$\left.\begin{matrix} x < a; \\ x < b. \end{matrix}\right\}$$

Если $a > b$, то $x < b$; если $a < b$, то $x < a$.

$$\left.\begin{matrix} x > a; \\ x < b. \end{matrix}\right\}$$

Если $a > b$, то не имеет решения; если $a < b$, то $a < x < b$.

$$\left.\begin{matrix} x < a; \\ x > b. \end{matrix}\right\}$$

Если $a < b$, то не имеет решения; если $a > b$, то $b < x < a$.

Неравенство второй степени

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Если $a > 0$, то $x < x_1$ и $x > x_2$; если $a < 0$, то $x_1 < x < x_2$.

Здесь x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) — действительные корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Если корни комплексно-сопряженные, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ справедливо для всех x при $a > 0$; не имеет решений при $a < 0$.

6. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

$$\div\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

$$a_{n+1} - a_n = d;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

где a_n — n-й член арифметической прогрессии; d — разность прогрессии.

Сумма членов арифметической прогрессии

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\,n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)\,d]\,n}{2}.$$

Если $d > 0$, то прогрессия возрастающая; если $d < 0$, то прогрессия убывающая.

Геометрическая прогрессия

$$\div\!\div\, a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-1},\ a_n.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q;$$

$$a_2 = a_1 q;$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

где a_n — n-й член геометрической прогрессии; q — знаменатель прогрессии.

Сумма членов геометрической прогрессии

для прогрессии возрастающей

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

для прогрессии убывающей

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q};$$

для прогрессии бесконечно убывающей

$$\underset{n \to \infty}{S_n} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Если $q > 1$, то прогрессия возрастающая; если $q < 1$, то прогрессия убывающая; если $q < 0$, то прогрессия знакопеременная.

7. Логарифмы

Определение

$$\log_b N = x; \quad b^x = N,$$

где x — логарифм; $b > 0$ — основание логарифма; N — число.

Из определения логарифма следует:

$$\log_a 1 = 0, \text{ так как } a^0 = 1;$$

$$\log_a a = 1, \text{ так как } a^1 = a;$$

$$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{при } a > 1; \\ +\infty & \text{при } a < 1. \end{cases}$$

Свойства

$$\log_b (mn) = \log_b m + \log_b n;$$

$$\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n;$$

$$\log_b m^n = n \log_b m;$$

$$\log_b \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \log_b m.$$

Десятичные логарифмы

$$\log_{10} N = \lg N.$$

Натуральные логарифмы

$$\log_e N = \ln N;$$

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 2{,}71828182\ldots$$

Переход от одной системы логарифмов к другой

$$\log_a N = \log_a b \cdot \log_b N = \frac{1}{\log_b a} \log_b N.$$

Модуль перехода от системы логарифмов с основанием b к системе с основанием a

$$M = \log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным и обратный переход

$$\lg N = \frac{1}{\ln 10} \ln N \approx 0{,}434294 \ln N,$$

$$M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e,$$

$$\ln N = \frac{1}{\lg e} \lg N \approx 2{,}302585 \lg N,$$

$$M = \frac{1}{\lg e} = \ln 10.$$

8. Теория соединений. Бином Ньютона

Число размещений из m элементов по n в каждом

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Число перестановок из n элементов

$$P_n = A_n^n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n = n!.$$

Число сочетаний из m элементов по n в каждом

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\,n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Формула замены

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

Замена выгодна, если $m - n < n$.

Бином Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

или

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m +$$

$$+ \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Формула члена разложения вида $(a+b)^n$

$$T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m.$$

III. ГЕОМЕТРИЯ

А. ПЛОСКИЕ ФИГУРЫ

1. Равносторонний треугольник

c — сторона;
h — высота;
S — площадь.

$$c = \frac{2}{3}\sqrt{3h} \approx 1{,}154h;$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0{,}866c;$$

$$S = \frac{c^2\sqrt{3}}{4} \approx 0{,}433c^2;$$

$$S = \frac{h^2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}577h^2.$$

2. Прямоугольный треугольник (рис. 2)

a, b — катеты;
c — гипотенуза;
α, β — острые углы;

$c^2 = a^2 + b^2;$
$\alpha + \beta = 90°;$
S — площадь.

$$S = \frac{ab}{2}.$$

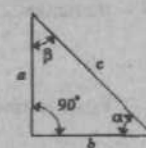


Рис. 2.

3. Квадрат

c — сторона;
d — диагональ;
S — площадь.

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} d \approx 0{,}707d;$$

$$d = \sqrt{2}\, c \approx 1{,}414c;$$

$$S = \frac{d^2}{2} = c^2.$$

4. Прямоугольник и параллелограмм

b — основание;
h — высота;
S — площадь.

$$S = bh.$$

5. Ромб

c — сторона;
D — большая диагональ;
d — малая диагональ;
S — площадь.

$$S = \frac{dD}{2}.$$

Если острые углы равны 60°, то $c = d$ и

$$S = \frac{c^2\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866c^2.$$

6. Трапеция

a, b — параллельные стороны, или основания;
h — высота;
S — площадь.

$$S = \frac{a+b}{2} h.$$

7. Правильный n-угольник

Внешний угол равен $\frac{360^\circ}{n}$;

внутренний угол равен $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$;

c — сторона;
a — апофема (перпендикуляр, проведенный из центра многоугольника к стороне);
S — площадь.

$$S = \frac{ca}{2} n.$$

8. Сторона a_n правильного вписанного и сторона b_n правильного описанного многоугольников (рис. 3)

r — радиус окружности.

$$a_n = 2r \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$b_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

9. Круг

C — длина окружности;
d — диаметр;
r — радиус;
S — площадь.

$C = \pi d \approx 3{,}142d;$
$C = 2\pi r \approx 6{,}283r;$
$C = 2\sqrt{\pi S} \approx 3{,}545\sqrt{S};$

$$d = \frac{C}{\pi} \approx 0{,}318C, \quad d = 2\sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 1{,}123\sqrt{S};$$

$$r = \frac{C}{2\pi} \approx 0{,}159C;$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \approx 0{,}785d^2;$$

$$S = \pi r^2 \approx 3{,}142r^2;$$

$$S = \frac{Cd}{4} = 0{,}250Cd.$$

Часть круга	Длина дуги	Площадь
1/2 круга	3,142 r	1,571 r^2
1/4 круга	1,571 r	0,785 r^2
1/6 круга	1,047 r	0,525 r^2

10. Круговое кольцо (рис. 4)

D — большой диаметр;
d — малый диаметр;
R — большой радиус;
r — малый радиус;
S — площадь.

$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2);$

$S = \pi(R^2 - r^2);$
$S = \pi(d + \delta)\delta;$
$\delta = D - d.$

11. Сектор (рис. 5)

r — радиус;
l — длина дуги;
$n°$ — градусная мера дуги;
S — площадь.

$$l = \frac{2\pi r n°}{360°} = 0{,}01745rn;$$

$$S = \frac{\pi r^2 n°}{360°} = 0{,}00872r^2 n.$$

12. Сегмент (рис. 6)

r — радиус;
a — хорда;
f — высота (стрелка);
$n°$ — градусная мера дуги;
α — радианная мера дуги;
l — длина дуги;
S — площадь.

$$a = 2r\sin\frac{n°}{2};$$

$$f = r\left(1 - \cos\frac{n°}{2}\right) = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{n°}{4} = 2r\sin^2\frac{n°}{4};$$

$$l = \pi r\frac{n°}{180°} = 0{,}01745rn \approx \sqrt{a^2 + \frac{16}{3}f^2};$$

$$S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi n°}{180°} - \sin n°\right) = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).$$

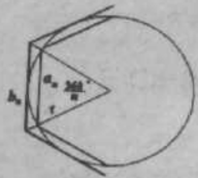


Рис. 3.

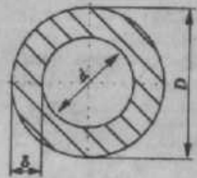


Рис. 4.

Рис. 5.

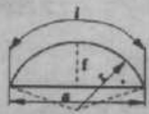


Рис. 6.

Б. ОБЪЕМЫ И ПОВЕРХНОСТИ

1. Призма (рис. 7)

h — высота;
p — периметр основания;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

$$V = Sh;$$

$$S_{бок} = ph.$$

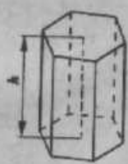


Рис. 7.

2. Пирамида правильная (рис. 8)

a — апофема;
h — высота;
p — периметр основания;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

$$V = \frac{Sh}{3};$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2}\, pa.$$

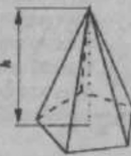


Рис. 8.

3. Усеченная пирамида (рис. 9)

Рис. 9.

a — апофема;
h — высота;
p_1, p_2 — периметры оснований;
V — объем;
S_1, S_2 — площади нижнего и верхнего оснований;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

$$V = \frac{1}{3}\, h\,(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2});$$

$$S_{бок} = \frac{1}{2}\,(p_1 + p_2)\, a.$$

2 А. Е. Цикунов

4. Цилиндр (рис. 10)

h — высота;
r — радиус основания;
d — диаметр основания;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

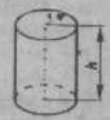


Рис. 10.

$$V = Sh = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi d^2 h;$$

$$S_{бок} = 2\pi rh = \pi dh = 6{,}283rh.$$

5. Конус (рис. 11)

C — длина окружности основания;
d — диаметр;
r — радиус;
l — образующая конуса;
h — высота;
V — объем;
S — площадь основания;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

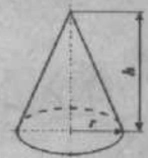


Рис. 11.

$$V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi d^2 h = 1{,}047r^2 h;$$

$$S_{бок} = \pi rl = \frac{1}{2}\pi dl = \frac{1}{2}Cl.$$

6. Усеченный конус (рис. 12)

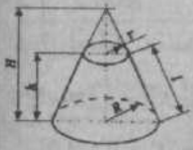


Рис. 12.

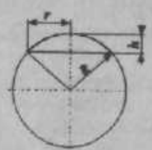
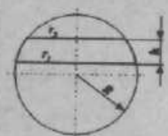
h — высота усеченного конуса;
H — высота полного конуса;
r — радиус малого основания;
R — радиус большого основания;
d — диаметр малого основания;
D — диаметр большого основания;
l — образующая усеченного конуса;
V — объем;
$S_{бок}$ — боковая поверхность.

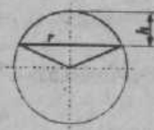
$$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr);$$

$$S_{бок} = \pi\,(R + r)\,l = \frac{1}{2}\pi\,(D + d);$$

$$H = h + \frac{hr}{R - r}.$$

7. Шар

Фигура	Формулы	
	поверхность	объем
Шар 	$4\pi R^2$; πD^2	$\frac{4\pi}{3}R^3 = 4{,}189R^3$; $\frac{\pi}{6}D^3 = 0{,}524D^3$
Шаровой сегмент 	$2\pi Rh$; $\pi\,(r^2 + h^2)$	$\pi h^2\left(R - \frac{1}{3}h\right)$; $\frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r^2)$
Шаровой пояс 	$2\pi Rh$	$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\,(r_1^2 + r_2^2)\,h$

Фигура	Формулы	
	поверхность	объем
Шаровой сектор 	$\pi R\,(r + 2h)$	$\frac{2\pi}{3}R^2h$

D, R — диаметр и радиус шара;
r_1, r_2 — радиусы оснований;
h — высота.

IV. ТРИГОНОМЕТРИЯ

1. Радианное измерение углов

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'';$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} \approx 0{,}017453 \text{ радиана};$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000291 \text{ радиана};$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \text{ радиана} \approx 0{,}000005 \text{ радиана}.$$

Углы в градусах	φ°	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Углы в радианах	$\frac{\pi}{180^\circ}\varphi^\circ$	0,0175	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

2. Тригонометрические функции и их знаки
(рис. 13 и 14)

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

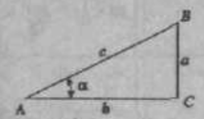


Рис. 13.

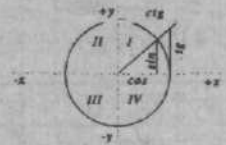


Рис. 14.

Квадрант	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
I	+	+	+	+	+	+
II	+	—	—	—	—	+
III	—	—	+	+	—	—
IV	—	+	—	—	+	—

3. Связь между тригонометрическими функциями

Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sec\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$
$\sin\alpha =$		$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sec\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\dfrac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$		$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\dfrac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$		$\dfrac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 q-1}$
$\sec\alpha =$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$		$\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha =$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\dfrac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	

4. Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	−1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	∞	0	∞
$\sec\alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	−2	−1	∞	1
$\mathrm{cosec}\,\alpha$	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	∞	−1	∞

5. Формулы приведения

$\sin(90^\circ - \alpha) = +\cos\alpha;$

$\sin(90^\circ + \alpha) = +\cos\alpha;$

$\sin(180^\circ - \alpha) = +\sin\alpha;$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha;$

$\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$

$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$

$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha;$

$\sin(360^\circ + \alpha) = +\sin\alpha;$

$\cos(90^\circ - \alpha) = +\sin\alpha;$

$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha;$

$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$

$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha;$

$\cos(270^\circ - \alpha) = -\sin\alpha;$

$\cos(270^\circ + \alpha) = +\sin\alpha;$

$\cos(360^\circ - \alpha) = +\cos\alpha;$

$\cos(360^\circ + \alpha) = +\cos\alpha;$

$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(180^\circ + \alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(270^\circ - \alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{tg}(360^\circ + \alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(180^\circ + \alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(270^\circ - \alpha) = +\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(360^\circ + \alpha) = +\mathrm{ctg}\,\alpha.$

6. Основные тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha.$$

7. Формулы сложения и вычитания

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta) : (1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta);$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = (\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1) : (\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha);$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha =$$

$$= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta);$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\alpha =$$

$$= \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

8. Формулы преобразования произведения

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) =$$

$$= -(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta = (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) =$$

$$= -(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta);$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta = (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= -(\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$

9. Формулы двойных, тройных и половинных углов

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\sin n\alpha = n\sin\alpha\cos^{n-1}\alpha - \frac{n}{3}\sin^3\alpha\cos^{n-3}\alpha +$$
$$+ \frac{n}{5}\sin^5\alpha\cos^{n-5}\alpha - \ldots;$$

$$\underline{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1};$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha \pm \sin\alpha = \sqrt{1 \pm \sin 2\alpha}.$$

10. Степени синуса и косинуса

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha;$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha;$$

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha;$$

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha;$$

$$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha.$$

11. Соотношение между функциями углов треугольника

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1;$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1;$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + 2;$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma;$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma;$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma = 1;$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma;$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2\gamma = 4\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma.$$

12. Тригонометрическое решение треугольника

Прямоугольный треугольник (рис. 15)

a, b — катеты;
c — гипотенуза;
α, β — острые углы;
$\alpha + \beta = 90°$.

$$a = c\sin\alpha;$$

$$a = b\operatorname{tg}\alpha;$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha};$$

$$c = \frac{b}{\sin\beta};$$

$$b = c\sin\beta;$$

$$b = a\operatorname{tg}\beta.$$

Произвольный треугольник (рис. 16)

a, b, c — стороны;
α, β, γ — противолежащие углы;
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$;
r — радиус описанного круга;
p — полупериметр;
S — площадь треугольника.

$$a = b\frac{\sin\alpha}{\sin\beta};\quad b = a\frac{\sin\beta}{\sin\alpha};\quad c = a\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha};$$

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma};\quad b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma};\quad c = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta};$$

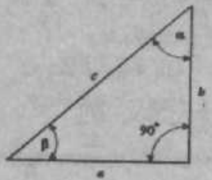


Рис. 15.

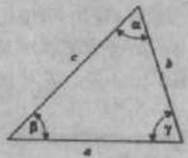


Рис. 16.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r;$$

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta;$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma;$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha;$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b - a\cos\gamma};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};$$

$$S = \frac{ab}{2}\sin\gamma = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma =$$
$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4r}.$$

V. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

1. Точка

Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Расстояние от точки до начала координат

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Общая формула расстояния между двумя точками при косоугольной системе координат

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + 2\,(x_2-x_1)\,(y_2-y_1)\cos\omega}.$$

Координаты середины отрезка

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Координаты точки, делящей отрезок в отношении $\frac{m}{n}$,

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n};\ y = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}.$$

2. Перенесение начала координат (рис. 17)

$$\begin{aligned} x &= a + x_1; \\ y &= b + y_1; \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x_1 &= x - a; \\ y_1 &= y - b. \end{aligned}$$

3. Полярные координаты (рис. 18)

Ox — полярная ось;
O — полюс;
r — радиус-вектор;
φ — полярный угол.

$$x = r\cos\varphi;$$
$$y = r\sin\varphi;$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Поворот координатных осей (рис. 19)

x, y — старые координаты точки M;
x_1, y_1 — новые координаты точки M.

$$x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha;$$
$$y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha.$$

5. Уравнение прямой

Общее

$$Ax + By + C = 0.$$

С угловым коэффициентом и начальной ординатой

$$y = kx + b.$$

В отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормальное

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

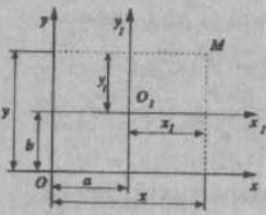


Рис. 17.

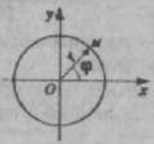


Рис. 18.

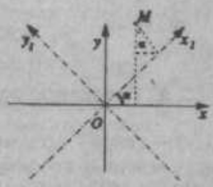


Рис. 19.

Нормирующий множитель

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(знак нужно брать обратный знаку C).

6. Две прямые

Уравнения прямых в общем виде

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Угол между двумя данными прямыми

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие параллельности двух прямых

$$k_2 = k_1 \text{ или } \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Условие перпендикулярности двух прямых

$$k_1k_2 = -1 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Координаты точки пересечения

$$x = \frac{C_1B_2 - C_2B_1}{B_1A_2 - B_2A_1};$$
$$y = \frac{C_2A_1 - C_1A_2}{B_1A_2 - B_2A_1}.$$

7. Прямая и точка

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

$$y - y_1 = k(x - x_1);$$

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

Расстояние от точки до прямой

$$d = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p$$

или

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

(знак нужно брать обратный знаку C).

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Условие, при котором три данные точки лежат на одной прямой

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

8. Площадь треугольника

Одна вершина в начале координат

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1).$$

Для любого положения треугольника

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] =$$

$$= \pm\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

9. Уравнение окружности

Центр окружности лежит в начале координат

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Центр окружности имеет координаты a и b

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Параметрическое уравнение окружности

$$x = r\cos t;$$
$$y = r\sin t.$$

10. Эллипс (рис. 20)

O — центр;
$AA_1 = 2a$ — большая ось;
$BB_1 = 2b$ — малая ось;
F, F_1 — фокусы;
FM, F_1M — радиус-векторы;
$FF_1 = 2c$ — фокусное расстояние;
$BF = BF_1 = AO = a$;
$FM + F_1M = AA_1 = 2a$;
$a^2 - c^2 = b^2$.

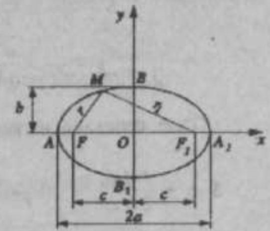


Рис. 20.

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1.$$

Радиус-векторы точки $M(x, y)$ эллипса

$$r = a \pm \varepsilon x.$$

Площадь эллипса

$$S = \pi ab.$$

Уравнение касательной к эллипсу в точке $M_1(x_1, y_1)$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали к эллипсу в точке $M_1(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Фокальный параметр эллипса

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Уравнение директрис эллипса

$$x = \pm\frac{a^2}{c} \text{ или } x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$

Уравнение диаметра эллипса

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k}x,$$

где k — угловой коэффициент сопряженного диаметра.

Параметрическое уравнение эллипса

$$x = a\cos t;\ y = b\sin t.$$

11. Гипербола (рис. 21)

O — центр;
F, F_1 — фокусы;
FM, F_1M — радиус-векторы;
$FM - F_1M = AA_1 = 2a$;
$FF_1 = 2c$;
$c^2 - a^2 = b^2$.

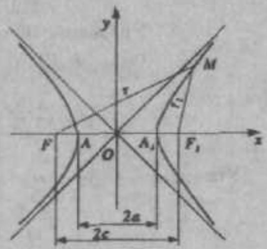


Рис. 21.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$$

Радиус-векторы точки $M(x, y)$ гиперболы

$$r = \frac{c}{a}x + a = \varepsilon x + a;$$

$$r_1 = \frac{c}{a}x - a = \varepsilon x - a.$$

Уравнение асимптот гиперболы

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Уравнение нормали к гиперболе

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

или

$$\frac{a^2 x}{x_1} + \frac{b^2 y}{y_1} = c^2.$$

Фокальный параметр гиперболы

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Уравнение директрис гиперболы

$$x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Уравнение диаметра гиперболы

$$y = \frac{b^2}{a^2 k}x,$$

где k — угловой коэффициент сопряженного диаметра.

Уравнение равносторонней гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Уравнение гиперболы в случае, когда оси координат являются асимптотами

$$xy = \frac{a^2}{2} \text{ или } y = \frac{k}{x}.$$

12. Парабола (рис. 22)

AN — директриса;
O — вершина;
F — фокус;
$AF = p$ — параметр параболы;
S — площадь.

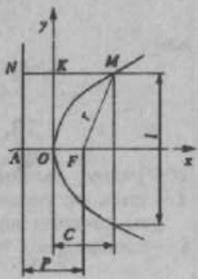


Рис. 22.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$

Эксцентриситет параболы

$$\varepsilon = \frac{FM}{MN} = 1.$$

Радиус-вектор точки M (x, y) параболы

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Площадь параболы

$$S = \frac{2}{3}lc.$$

Уравнение директрисы параболы

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Уравнение касательной к параболе

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

или

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Уравнение нормали к параболе

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$$

или

$$y_1(x - x_1) + p(y - y_1) = 0.$$

13. Циклоида (рис. 23)

a — радиус катящегося круга;
t — угол, на который поворачивается круг при своем качении по прямой;
S — площадь под одной аркой циклоиды.

$$x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2};$$

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t);$$

$$S = 3\pi a^2.$$

14. Тангенсоида (рис. 24)

$$y = \operatorname{tg} x.$$

15. Синусоида (рис. 25)

A — амплитуда;
ω — круговая частота;
φ_0 — начальная фаза.

$$y = \sin x \text{ или } y = A\sin(\omega x + \varphi_0).$$

16. Логарифмическая кривая (рис. 26)

$$y = \ln x \text{ или } y = \log_a x\ (a > 0 \text{ и } a \neq 1).$$

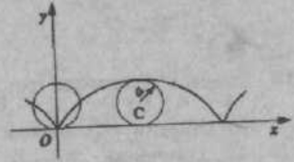


Рис. 23.

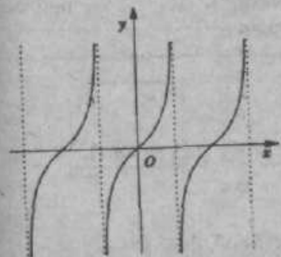


Рис. 24.

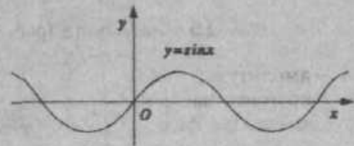


Рис. 25.

17. Показательная кривая (рис. 27)

$$y = e^x.$$

18. Спираль Архимеда (рис. 28)

$MM_1 = a$ — шаг спирали (постоянная величина).

$$r = a\varphi.$$

19. Лемниската Бернулли (рис. 29)

$$OK = a.$$

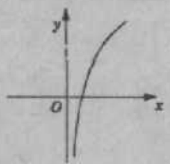


Рис. 26.

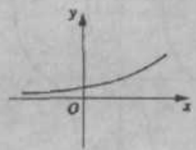


Рис. 27.

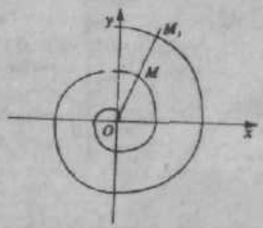


Рис. 28.

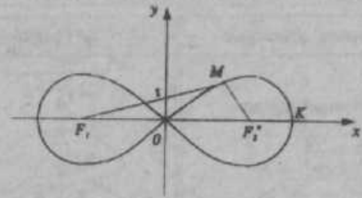


Рис. 29.

В прямоугольных координатах

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

В полярных координатах

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Рациональное параметрическое представление

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{t + t^3}{1 + t^4};\quad y = a\sqrt{2}\,\frac{t - t^3}{1 + t^4} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

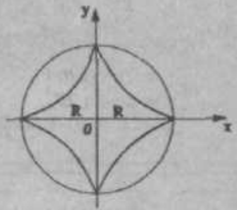
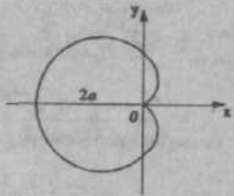
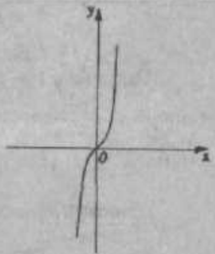
t связано с φ соотношением

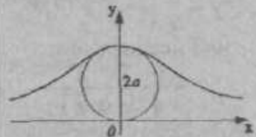
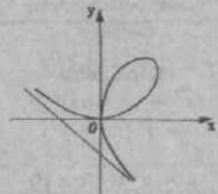
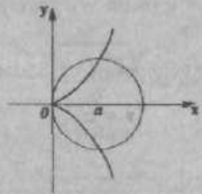
$$t^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right).$$

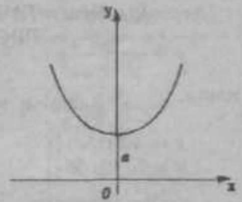
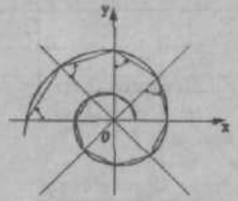
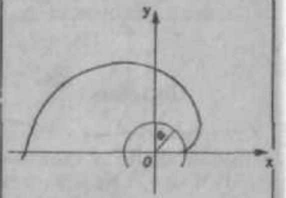
Площадь одной петли лемнискаты

$$S = \frac{a^2}{2}.$$

20. Некоторые другие кривые

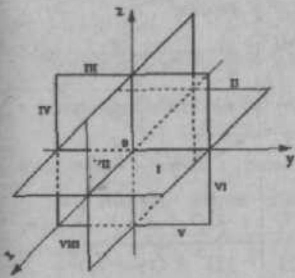
Название; уравнение	График
Гипоциклоида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ или $\left.\begin{aligned} x &= R\cos^3\varphi; \\ y &= R\sin^3\varphi \end{aligned}\right\}$	
Кардиоида $(x^2 + y^2 + ax)^2 =$ $= a^2(x^2 + y^2)$ или $\rho = a(1 - \cos\varphi)$	
Кубическая парабола $y = ax^3$	

Верзьера Аньези $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ или $\left.\begin{aligned} x &= 2a\,\mathrm{ctg}\,\theta; \\ y &= 2a\sin 2\theta \end{aligned}\right\}$	
Декартов лист $x^3 + y^3 = 3axy$ или $\rho = \dfrac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}$	
Циссоида $y^2 = \dfrac{x^3}{a - x}$ или $\rho = \dfrac{a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$	

Цепная линия $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ или $R = \frac{y^2}{a} = \frac{a}{\cos^2\varphi}$ (R — радиус кривизны)	
Логарифмическая спираль $\rho = ae^{k\varphi}$ $(k > 0)$	
Эвольвента (развертка окружности) $\left.\begin{array}{l} x = a(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha); \\ y = a(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) \end{array}\right\}$ или $\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{a} - \arccos\frac{a}{\rho}$	

VI. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Знаки в квадрантах (рис. 30)



I $(+x, +y, +z)$;
II $(-x, +y, +z)$;
III $(-x, -y, +z)$;
IV $(+x, -y, +z)$;
V $(+x, +y, -z)$;
VI $(-x, +y, -z)$;
VII $(-x, -y, -z)$;
VIII $(+x, -y, -z)$.

Рис. 30.

2. Проекция

Определение (рис. 31)

$$ab = AB\cos\alpha.$$

Соотношение между направляющими косинусами любой оси в пространстве

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

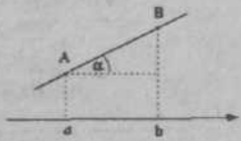


Рис. 31.

3. Точка

Координаты произвольной точки

$$x = d\cos\alpha;$$
$$y = d\cos\beta;$$
$$z = d\cos\gamma,$$

откуда

$$\cos\alpha = \frac{x}{d};\quad \cos\beta = \frac{y}{d};\quad \cos\gamma = \frac{z}{d}.$$

Расстояние от точки до начала координат

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Расстояние между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Деление отрезка в отношении $\frac{m}{n} = \lambda$

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};$$

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

$$z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Деление отрезка пополам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

4. Прямая в пространстве

Общий вид уравнения прямой в пространстве

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;\\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Уравнение прямой с направляющими косинусами

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Направляющие косинусы

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Угол между двумя прямыми

$$\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\,\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Условие параллельности прямых

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности прямых

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

5. Плоскость в пространстве

Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Нормальное уравнение плоскости

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+p=0.$$

Нормирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(знак μ надо брать обратный знаку D).

Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

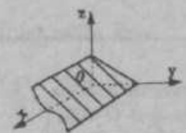
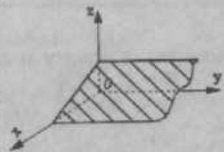
где a, b, c — отрезки, отсекаемые на осях координат.

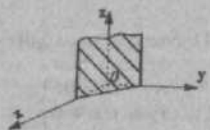
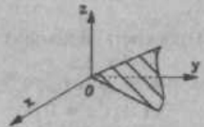
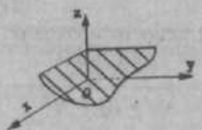
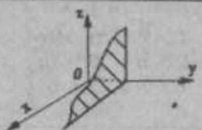
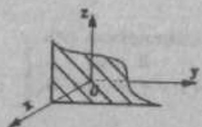
Расстояние от плоскости до начала координат

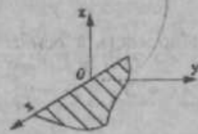
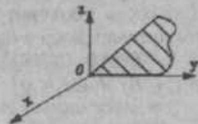
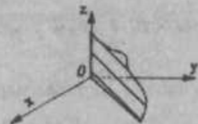
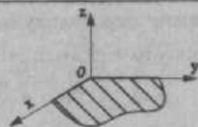
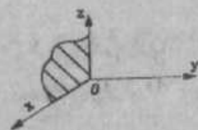
$$p=\frac{-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

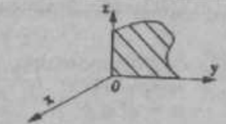
(знак корня надо брать обратный знаку D).

6. Анализ общего уравнения плоскости

Положение плоскости; уравнение	Схематическое изображение
Плоскость ∥ оси x $\left.\begin{array}{c}A=0;\\ By+Cz+D=0\end{array}\right\}$	
Плоскость ∥ оси y $\left.\begin{array}{c}B=0;\\ Ax+Cz+D=0\end{array}\right\}$	

Плоскость ∥ оси z $\left.\begin{aligned} C = 0; \\ Ax + By + D = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость проходит через начало координат $\left.\begin{aligned} D = 0; \\ Ax + By + Cz = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость ∥ осям x и y $\left.\begin{aligned} A = B = 0; \\ Cz + D = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость ∥ осям x и z $\left.\begin{aligned} A = C = 0; \\ By + D = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость ∥ осям y и z $\left.\begin{aligned} B = C = 0; \\ Ax + D = 0 \end{aligned}\right\}$	

Плоскость проходит через ось x $\left.\begin{aligned} A = D = 0; \\ By + Cz = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость проходит через ось y $\left.\begin{aligned} B = D = 0; \\ Ax + Cz = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость проходит через ось z $\left.\begin{aligned} C = D = 0; \\ Ax + By = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость $x0y$ $\left.\begin{aligned} A = B = D = 0; \\ Cz = 0;\ z = 0 \end{aligned}\right\}$	
Плоскость $x0z$ $\left.\begin{aligned} A = C = D = 0; \\ By = 0;\ y = 0 \end{aligned}\right\}$	

Плоскость $y0z$ $\left.\begin{array}{l} B = C = D = 0; \\ Ax = 0;\ x = 0 \end{array}\right\}$	

7. Прямая и плоскость

Угол между прямой $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$.

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

$$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) + C\,(z - z_1) = 0.$$

Уравнение пучка плоскостей

$$Ax + By + Cz + D + \lambda\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0.$$

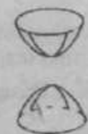
Координаты точки пересечения прямой с плоскостью

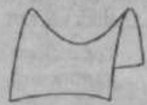
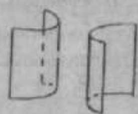
$$x = a - l\,\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Al + Bm + Cn};$$

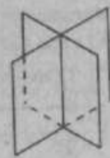
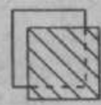
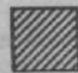
$$y = b - m\,\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Al + Bm + Cn};$$

$$z = c - n\,\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Al + Bm + Cn}.$$

8. Поверхности второго порядка

Название; каноническое уравнение	Схематическое изображение
Трехосный эллипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	
Однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	
Двухполостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$	

Конус второго порядка $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
Эллиптический параболоид $z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$	
Гиперболический параболоид $z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$ $(p>0,\ q>0)$	
Гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
Эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	

Параболический цилиндр $y^2=2px$	
Пара пересекающихся плоскостей $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
Пара параллельных плоскостей $\frac{x^2}{a^2}=1$	
Пара совпадающих плоскостей $x^2=0$	

VII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители

Определитель 3-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Правило Саррюса (рис. 32)

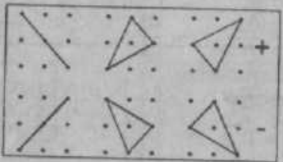


Рис. 32.

Определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ij}|.$$

Разложение определителя по элементам i-й строки

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(здесь A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} — минор элемента a_{ij}, т. е. определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из определителя Δ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца).

Формулы Крамера

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right]$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

(здесь $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — определитель системы $(\Delta \neq 0)$; Δ_i — определитель, полученный из определителя системы заменой i-го столбца столбцом из свободных членов).

2. Матрицы

Обозначение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

или

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

где m — число строк; n — число столбцов.

Сложение матриц

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ . . . & . . . & . . . & . . . \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ . & . & . & . \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ . & . & . & . \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}b_{\nu j}$$

$(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, k)$.

Обратная матрица

A^{-1} — обратная матрица к

$$A = (a_{ij})_{n,\,n}$$

если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица;

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = |A| \neq 0$ – определитель матрицы A.

Система n линейных уравнений с n неизвестными в матричном виде

$$AX = B.$$

Решение

$$X = A^{-1}B,$$

где

$A = (a_{ij})_{n,n}$ – матрица коэффициентов;

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных членов.

VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Линейные операции над векторами

Вектор $\overline{A}$ – это отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление

$A = |\overline{A}|$ – длина вектора, или модуль.

Равенство векторов (рис. 33)

$$\overline{A} = \overline{B},$$

если

$$|\overline{A}| = |\overline{B}| \text{ и } \overline{A} \downarrow\downarrow \overline{B}.$$

Сложение векторов (рис. 34–36)

$$\overline{A} + \overline{B} = \overline{C};$$

$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} = \overline{E}.$$

Противоположные векторы (рис. 37)

$$|\overline{A}| = |\overline{A}_1| \text{ и } \overline{A} \downarrow\uparrow \overline{A}_1.$$

Вычитание векторов (рис. 38 и 39)

$$\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}_1 = \overline{C},$$

где $\overline{B}_1 = -\overline{B}$.

Умножение вектора на число

$$k\overline{A} = \overline{B}.$$

Вектор $\overline{B}$ удовлетворяет условиям:

$$|\overline{B}| = |k|\,|\overline{A}|; \quad \left.\begin{matrix} \overline{B} \downarrow\downarrow \overline{A}, \text{ если } k > 0; \\ \overline{B} \downarrow\uparrow \overline{A}, \text{ если } k < 0. \end{matrix}\right\}$$

Если $k = 0$ или $\overline{A} = 0$, то $\overline{B} = 0$.

Рис. 33.

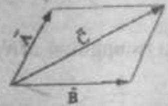


Рис. 34.

Рис. 35.

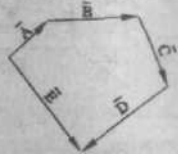


Рис. 36.

Рис. 37.

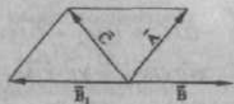


Рис. 38.

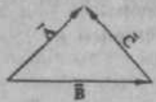


Рис. 39.

2. Проекция вектора на ось или вектор (рис. 40)

$$\text{пр}_x \bar{A} = \text{пр}_{\bar{B}} \bar{A} = MN = A\cos\varphi = A\cos(\widehat{\bar{A}\bar{B}}).$$

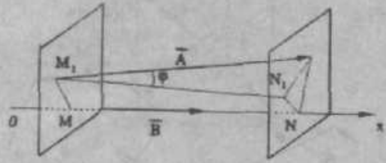


Рис. 40.

3. Компоненты и координаты вектора (рис. 41)

$\bar{A} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$ или $\bar{A} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}$, где $\overline{OM}_1 = X\bar{i}$; $\overline{OM}_2 = Y\bar{j}$; $\overline{OM}_3 = Z\bar{k}$ — компоненты, или составляющие, вектора; $X = A\cos\alpha$; $Y = A\cos\beta$; $Z = A\cos\gamma$ — координаты вектора (проекции этого вектора на оси координат).

4. Линейные операции над векторами, заданными своими координатами

Если $\bar{A} = \bar{A}_1 \pm \bar{A}_2$, то

$$X = X_1 \pm X_2;\ Y = Y_1 \pm Y_2;\ Z = Z_1 \pm Z_2.$$

Если $\bar{A}_2 = \lambda\bar{A}_1$, то

$$X_2 = \lambda X_1;\ Y_2 = \lambda Y_1;\ Z_2 = \lambda Z_1.$$

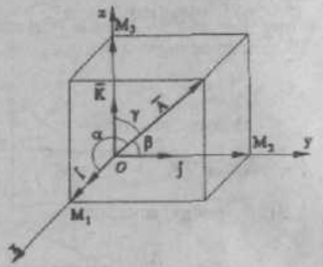


Рис. 41.

5. Скалярное произведение двух векторов

Определение

$$\bar{A}\bar{B} = AB\cos(\widehat{\bar{A}\bar{B}}) = A\,\text{пр}_{\bar{A}}\bar{B} = B\,\text{пр}_{\bar{B}}\bar{A}.$$

Свойства скалярного произведения

$$\bar{A}\bar{B} = \bar{B}\bar{A};$$

$$(m\bar{A})\,\bar{B} = m\,(\bar{A}\bar{B});$$

$$(\bar{A} + \bar{B})\,\bar{C} = \bar{A}\bar{C} + \bar{B}\bar{C}.$$

Скалярное произведение векторов
в координатной форме

$$\bar{A}\bar{B} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Скалярный квадрат вектора

$$\bar{A}^2 = \bar{A}\bar{A} = AA\cos 0 = A^2.$$

Квадрат модуля вектора

$$A^2 = \bar{A}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Модуль вектора

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{A}\bar{B}}{|\bar{A}|\;|\bar{B}|} =$$

$$= \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности векторов

$$\bar{A} \perp \bar{B},$$

если

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Условие параллельности векторов

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{A}\,\{X,\ Y,\ Z\}$

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

6. Векторное произведение двух векторов (рис. 42)

Определение

$$\overline{A} \times \overline{B} = \overline{C}.$$

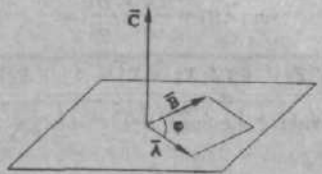


Рис. 42.

Вектор $\overline{C}$ удовлетворяет условиям:

$$|\overline{C}| = AB\sin(\widehat{\overline{A}\overline{B}}),\quad \overline{C} \perp \overline{A},\quad \overline{C} \perp \overline{B},$$

и векторы $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$ образуют правую (левую) тройку векторов, если система координат правая (левая).

Свойства векторного произведения

$$\overline{A} \times \overline{B} = -\overline{B} \times \overline{A};$$

$$(m\overline{A}) \times \overline{B} = m(\overline{A} \times \overline{B});\quad \overline{A} \times (n\overline{B}) = n(\overline{A} \times \overline{B});$$

$$(\overline{A} + \overline{B}) \times \overline{C} = \overline{A} \times \overline{C} + \overline{B} \times \overline{C};$$

$$\overline{C} \times (\overline{A} + \overline{B}) = \overline{C} \times \overline{A} + \overline{C} \times \overline{B}.$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\overline{A} \times \overline{B} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = (Y_1Z_2 - Y_2Z_1)\,\overline{i} +$$

$$+ (Z_1X_2 - Z_2X_1)\,\overline{j} + (X_1Y_2 - X_2Y_1)\,\overline{k}.$$

Угол между векторами

$$\sin(\widehat{\overline{A}\overline{B}}) = \frac{|\overline{A} \times \overline{B}|}{|A|\ |B|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(Y_1Z_2 - Y_2Z_1)^2 + (Z_1X_2 - Z_2X_1)^2 + (X_1Y_2 - X_2Y_1)^2}}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\,\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

7. Смешанное произведение трех векторов

Определение

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{A}(\overline{B} \times \overline{C}) = (\overline{A} \times \overline{B})\,\overline{C}.$$

Свойства смешанного произведения

$$\overline{A}\overline{B}\overline{C} = \overline{B}\overline{C}\overline{A} = \overline{C}\overline{A}\overline{B} = -(\overline{B}\overline{A}\overline{C}) =$$

$$= -(\overline{A}\overline{C}\overline{B}) = -(\overline{C}\overline{B}\overline{A});$$

$$(\overline{A} + \overline{B})\,\overline{C}\overline{D} = \overline{A}\overline{C}\overline{D} + \overline{B}\overline{C}\overline{D};$$

$$(m\bar{A})\,\overline{BC} = m\,(\overline{ABC}).$$

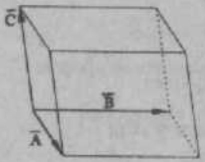


Рис. 43.

Геометрический смысл смешанного произведения (рис. 43)

$\overline{ABC}$ равно объему параллелепипеда.

Условие компланарности трех векторов

$$\overline{ABC} = 0.$$

Смешанное произведение в координатной форме

$$\overline{ABC} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Двойное векторное произведение

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}\,(\overline{AC}) - \bar{C}\,(\overline{AB});$$

$$(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C} = \bar{B}\,(\overline{AC}) - \bar{A}\,(\overline{BC}).$$

IX. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Пределы

$$\lim (x - y + z) = \lim x - \lim y + \lim z;$$

$$\lim (xyz) = \lim x \lim y \lim z;$$

$$\lim \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\lim x}{\lim y}, \text{ если } \lim y \neq 0;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \quad (e \approx 2{,}71828);$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x;$$

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1;$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi};$$

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Производная и дифференциал

Простейшие производные

1. $(Cu)' = Cu'$;

2. $(u + v + w + \ldots)' = u' + v' + w' + \ldots$ — для конечного числа слагаемых;

3. $(uvw\ \ldots)' = u'vw\ \ldots + v'uw\ \ldots + w'uv\ \ldots + \ldots$ — для конечного числа множителей;

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

5. $(C)' = 0$;

6. $(x)' = 1$;

7. $(x^n)' = nx^{n-1}$;

8. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

9. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

11. $(\lg x)' = \lg e \cdot \dfrac{1}{x} \approx 0{,}4343 \cdot \dfrac{1}{x}$;

12. $(a^x)' = a^x \ln a$;

13. $(e^x)' = e^x$;

14. $(\sin x)' = \cos x$;

15. $(\cos x)' = -\sin x$;

16. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$;

17. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$;

18. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

19. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

20. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$;

21. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$;

22. $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$;

23. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$;

24. $(\operatorname{arcsec} x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

25. $(\operatorname{arccosec} x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$;

26. $(u^v)' = vu^{v-1}(u)' + u^v \ln u\,(v)'$.

Производные некоторых функций

1. $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{x^n}$;

2. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$;

3. $(e^x)^{(n)} = e^x$;

4. $(a^{mx})^{(n)} = m^n \ln^n a \cdot a^{mx}$;

5. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$;

6. $(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' +$

$+ \dfrac{n(n-1)}{2} u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$;

7. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$.

Дифференциал функции и его простейшие свойства

$$dy = y'dx;$$

1. $d(Cu) = Cdu$;

2. $d(u + v - w + \ldots) = du + dv - dw + \ldots$ — для конечного числа слагаемых;

3. $d(uvw\ldots) = (vw\ldots)\,du + (uw\ldots)\,dv + (uv\ldots)\,dw + \ldots$ — для конечного числа множителей;

4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)]}{n!}(x - x_0)^n \quad (0 < \theta < 1).$$

Формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (0 < \theta < 1).$$

3. Геометрические приложения дифференциального исчисления

Уравнение касательной в данной точке

$$y - y_1 = (y')_1 (x - x_1);$$

$$y - y_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x = x_1 \\ y = y_1}} (x - x_1).$$

Уравнение нормали в данной точке

$$y - y_1 = -\frac{1}{(y')_1}(x - x_1) = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_1 (x - x_1).$$

Длина подкасательной и поднормали

$$S_T = \frac{y_1}{y'}\bigg|_{\substack{x = x_1\\ y = y_1}} \quad \text{и} \quad S_N = y_1 y'\bigg|_{\substack{x = x_1\\ y = y_1}}$$

Длина касательной и нормали

$$T = y_1\sqrt{\left(\frac{1}{y_1'}\right)^2 + 1} = y_1\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)_1^2 + 1}$$

или

$$T = \frac{y_1}{y_1'}\sqrt{1 + (y_1')^2};$$

$$N = y_1\sqrt{(y_1')^2 + 1}.$$

Угол между кривыми

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y_1' - y_1'}{1 + y_1'Y_1'}.$$

Кривизна в декартовых координатах

$$k = \frac{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}; \quad k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Кривизна в полярных координатах

$$k = \frac{r^2 - r\dfrac{d^2r}{d\varphi^2} + 2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Радиус кривизны в декартовых координатах

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}; \quad R = \frac{1}{k}.$$

Радиус кривизны в полярных координатах

$$R = \frac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}} = \frac{[r^2 + (r')^2]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2(r')^2 - rr''}.$$

Координаты центра кривизны

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''};\\ \beta &= y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \end{aligned}\right\} \quad (y'' \neq 0)$$

4. Функции многих переменных

Общий вид

$$u = f(x, y, z, \ldots).$$

Частная производная

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)}{\Delta x} =$$

$$= f'_x(x, y, z, \ldots).$$

Частный дифференциал

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Полный дифференциал функции $u = f(x, y, z)$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Производная сложной функции

Пусть $u = f(x, y, z)$, а x, y, z — функции от t. Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}.$$

Формула Тейлора

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = f(x,\ y) + \frac{1}{1!} [f'_x(x,\ y)\,\Delta x +$$

$$+ f'_y(x,\ y)\,\Delta y] + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x,\ y)\,\Delta x^2 +$$

$$+ 2f''_{yx}(x,\ y)\,\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x,\ y)\,\Delta y^2] +$$

$$+ \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\,\Delta x^3 +$$

$$+ 3f'''_{xxy}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\,\Delta x^2 \Delta y +$$

$$+ 3f'''_{xyy}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\,\Delta x \Delta y^2 +$$

$$+ f'''_{yyy}(x + \theta\Delta x,\ y + \theta\Delta y)\,\Delta y^3],$$

где $0 < \theta < 1$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x,\ y,\ z) = 0$ в точке $M(x,\ y,\ z)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

где $X,\ Y,\ Z$ — текущие координаты.

Уравнение нормали

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

X. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Неопределенный интеграл

Определение интеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$; C — произвольная постоянная.

Простейшие свойства

1. $\int dx = x + C$;
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;
3. $\int (u + v + w + \ldots)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx +$ $+ \int w\,dx + \ldots$ — для конечного числа слагаемых;
4. $\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx$ или $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Интегралы от рациональных функций

1. $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$;
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
3. $\int (ax + b)^n\,dx = \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad (n \neq -1)$;

4. $\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a}\ln|ax+b| + C$;
5. $\int \dfrac{ax+b}{cx+d}\,dx = \dfrac{a}{c}x + \dfrac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$;
6. $\int \dfrac{dx}{(x+a)(x+b)} =$ $= \dfrac{1}{a-b}\ln\left|\dfrac{x+b}{x+a}\right| + C \quad (a \neq b)$;
7. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;
8. $\int \dfrac{x\,dx}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{1}{a-b}(a\ln|x+a| -$ $- b\ln|x+b|) + C \quad (a \neq b)$;
9. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;
11. $\int \dfrac{x\,dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+a^2| + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \dfrac{1}{2a^2}\cdot\dfrac{x}{x^2+a^2} + \dfrac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;
13. $\int \dfrac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+a^2} + C$;

14. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} +$

$+ \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{3}{8a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$

15. $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^3} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x^2+a^2)^2} + C;$

16. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)(x+b)} =$

$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\ln\frac{|x+b|}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{b}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C;$

17. $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)(x+b)} =$

$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(a\operatorname{arctg}\frac{x}{a} - b\ln\frac{|x+b|}{\sqrt{x^2+a^2}}\right) + C;$

18. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)(x+b)} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b^2\ln|x+b| +\right.$

$\left. + \frac{1}{2}a^2\ln|x^2+a^2| - ab\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right) + C;$

19. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C$

$(b^2-4ac>0);$

20. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$

$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$

$(b^2-4ac<0);$

21. $\int \frac{xdx}{ax^2+bx+c} =$

$+ \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{ax^2+bx+c};$

22. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C;$

23. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C \quad (n \neq -1);$

24. $\int \frac{xdx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|) + C;$

25. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) +\right.$

$\left. + a^2\ln|a+bx|\right] + C;$

26. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C;$

27. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C;$

28. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right) + C;$$

29. $$\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx| - \right.$$
$$\left. - \frac{a^2}{a+bx}\right) + C;$$

30. $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} + \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C;$$

31. $$\int \frac{xdx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right] + C;$$

32. $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,\mathrm{arctg}\, x\sqrt{\frac{b}{a}} + C\ (ab>0);$$

33. $$\int \frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\left|\frac{a+bx}{a-bx}\right| + C;$$

34. $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} -$$
$$-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx;$$

35. $$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{np+m+1} +$$
$$+\frac{anp}{np+m+1}\int x^n(a+bx^n)^{p-1}\,dx;$$

36. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p} =$$
$$= -\frac{1}{(m-1)\,ax^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} -$$
$$-(m-n+np-1)b\int \frac{dx}{x^{m-n}(a+bx^n)^p}\quad (m>1);$$

37. $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^p} =$$
$$= \frac{1}{an(p-1)\,x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}} +$$
$$+\frac{m-n+np-1}{an(p-1)}\int \frac{dx}{x^m(a+bx^n)^{p-1}};$$

38. $$\int \frac{(a+bx^n)^p\,dx}{x^m} = -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{a(m-1)\,x^{m-1}} -$$
$$-\frac{b(m-n-np-1)}{a(m-1)}\int \frac{(a+bx^n)^p\,dx}{x^{m-n}};$$

39. $$\int \frac{(a+bx^n)^p\,dx}{x^m} = \frac{(a+bx^n)^p}{(np-m+1)\,x^{m-1}} +$$
$$+\frac{anp}{np-m+1}\int \frac{(a+bx^n)^{p-1}\,dx}{x^m};$$

40. $$\int \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} = \frac{x^{m-n+1}}{b(m-np+1)(a+bx^n)^{p-1}} -$$

$$-\frac{a(m-n+1)}{b(m-np+1)}\int\frac{x^{m-n}\,dx}{(a+bx^n)^p};$$

41. $$\int\frac{x^m\,dx}{(a+bx^n)^p}=\frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+bx^n)^{p-1}}-$$

$$-\frac{m+n-pn+1}{an(p-1)}\int\frac{x^m dx}{(a+dx^n)^{p-1}};$$

42. $$\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a^2}\left[\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+(2n-3)\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}\right];$$

43. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2(n-1)a}\left[\frac{x}{(a+bx^2)^{n-1}}+\right.$$

$$\left.+(2n-3)\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}}\right];$$

44. $$\int\frac{xdx}{(a+bx^2)^n}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{(a+bz)^n}\quad(z=x^2);$$

45. $$\int\frac{x^2dx}{(a+bx^2)^n}=\frac{-x}{2b(n-1)(a+bx^2)^{n-1}}+$$

$$+\frac{1}{2b(n-1)}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{n-1}};$$

46. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^n)}=\frac{1}{an}\ln\left|\frac{x^n}{a+bx^n}\right|+C;$$

47. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^n}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)^{n-1}}-$$

$$-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^n};$$

48. $$\int\frac{xdx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\ln\left|x^2+\frac{a}{b}\right|+C;$$

49. $$\int\frac{x^2dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2};$$

50. $$\int\frac{dx}{x(a+bx^2)}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x^2}{a+bx^2}\right|+C;$$

51. $$\int\frac{dx}{x^2(a+bx^2)}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}\int\frac{dx}{a+bx^2};$$

52. $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2};$$

53. $$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C.$$

Интегралы от иррациональных функций

1. $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C;$$

2. $\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C;$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b} + C;$

4. $\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + C;$

5. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{b-ac}} \ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b-ac}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b-ac}}\right| + C$$

$(b-ac>0);$

6. $\int \frac{dx}{(x+c)\sqrt{ax+b}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{ac-b}} \operatorname{acrtg} \sqrt{\frac{ax+b}{ac-b}} + C \quad (b-ac<0);$$

7. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} -$

$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \ln\left|\left[\sqrt{a(cx+d)} + \sqrt{c(ax+b)}\right]\right| + C$$

$(a>0);$

8. $\int \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,dx = \frac{1}{c}\sqrt{(ax+b)(cx+d)} -$

$$-\frac{ad-bc}{c\sqrt{ac}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a(cx+d)}{c(ax+b)}} + C$$

$(c>0; \quad a<0);$

9. $\int x\sqrt{a+bx}\,dx =$

$$= -\frac{2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C;$$

10. $\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx =$

$$= \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C;$$

11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx}} = -\frac{2(2a-bx)}{3b^2}\sqrt{a+bx} + C;$

12. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}} =$

$$= \frac{2(8a^2-4abx+3b^2x^2)}{15b^3}\sqrt{a+bx} + C;$$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| + C \quad (a>0);$$

14. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \quad (a < 0);$$

15. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = \frac{-\sqrt{a+bx}}{ax} -$$

$$- \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

16. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}\,dx}{x} =$$

$$= 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}};$$

17. $$\int x^m \sqrt{2ax-x^2}\,dx = -\frac{x^{m-1}(2ax+x^2)^{\frac{3}{2}}}{m+1} +$$

$$+ \frac{(2m+1)\,a}{m+2} \int x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}\,dx;$$

18. $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} +$$

$$+ \frac{(2m-1)\,a}{m} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

19. $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^m}\,dx = -\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{(2m-3)ax^m} +$$

$$+ \frac{m-3}{(2m-3)a} \int \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{x^{m-1}}\,dx;$$

20. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{ax} + C;$$

21. $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^3}}{x^3}\,dx = -\frac{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3ax^3} + C;$$

22. $$\int \frac{dx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x-a}{a^2\sqrt{2ax-x^2}} + C;$$

23. $$\int \frac{xdx}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{2ax-x^2}} + C;$$

24. $$\int F(x)\sqrt{2ax-x^2}\,dx =$$

$$= \int F(z+a)\,\sqrt{a^2+z^2}\,dz \quad (z = x-a);$$

25. $$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax+x^2}} = \ln|x+a+$$

$$+ \sqrt{2ax+x^2}| + C;$$

26. $\int F(x)\sqrt{2ax+x^3}\,dx =$

$= \int F(z-a)\sqrt{z^2-a^2}\,dz \quad (z = x+a);$

27. $\int \sqrt{a+bx-cx^2}\,dx = \frac{2cx-b}{4c}\sqrt{a+bx-cx^2} +$

$+\frac{b^2-4ac}{8c^{\frac{3}{2}}}\arcsin\frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C;$

28. $\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\,dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} +$

$+(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C;$

29. $\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} -$

$-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C;$

30. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C;$

31. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-\alpha)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}} + C;$

32. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|2ax +$

$+ b + 2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}| + C \quad (a>0);$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C \quad (a<0);$

34. $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{2ax+b}{4a}\sqrt{ax^2+bx+c} +$

$+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$

35. $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} -$

$-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$

36. $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} =$

$-\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|\frac{x}{bx+2c+2\sqrt{c(ax^2+bx+c)}}\right| + C$

$(c>0);$

37. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{C}} \arcsin \frac{bx+2c}{x\sqrt{b^2-4ac}} + C \quad (c<0);$$

38. $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

39. $$\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}} + C;$$

40. $$\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} -$$

$$- \frac{a^4}{8} \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

41. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} +$$

$$+ \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

42. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

43. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} +$$

$$+ a \ln \left| \frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} \right| + C;$$

44. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + C;$$

45. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln |x +$$

$$+ \sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

46. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{a}\ln \left| \frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}} \right| + C;$$

47. $$\int \frac{dx}{(a+b)\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \frac{x+b}{\sqrt{a^2+b^2}\,\sqrt{x^2+a^2} + a^2 - bx} \right| +$$

$$+ C;$$

48. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x} + C;$$

49. $$\int (x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2+5a^2)\sqrt{x^2+a^2} +$$

$$+ \frac{3}{8}a^4 \ln |a+\sqrt{x^2+a^2}| + C;$$

50. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C;$$

51. $\int (x^2 + a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(x^2 + a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} +$

$+ \frac{na^2}{n+1} \int (x^2 + a^2)^{\frac{n}{2} - 1} dx;$

52. $\int x(x^2 + a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{n}{2} + 1}}{n+2} + C;$

53. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} +$

$+ \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C;$

54. $\int \frac{dx}{x^3 (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2x^2} +$

$+ \frac{1}{2a^3} \ln\left|\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x}\right| + C;$

55. $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} -$

$- \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C;$

56. $\int x\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} + C;$

57. $\int x^2\sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{x^2 - a^2} -$

$- \frac{a^4}{8} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C;$

58. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} + a \arcsin\frac{a}{x} + C;$

59. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} +$

$+ \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C;$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C;$

61. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2} + C;$

62. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} +$

$+ \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C;$

63. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{1}{c} \arcsin\frac{a}{x} + C;$

64. $\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \times$

$\times \ln\left|\frac{bx + a^2 + \sqrt{b^2 - a^2}\sqrt{x^2 - a^2}}{x+b}\right| + C;$

65. $\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x^2-b^2}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin \frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C;$

66. $\int \frac{dx}{(x \pm a)\sqrt{x^2-a^2}} = \pm \frac{1}{a}\sqrt{\frac{x \mp a}{x \pm a}} + C;$

67. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2 x} + C;$

68. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} + C;$

69. $\int (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} +$

$+ \frac{3a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C;$

70. $\int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} -$

$- \frac{na^2}{n+1} \int (x^2-a^2)^{\frac{n}{2}-1} dx;$

71. $\int x(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C;$

72. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} +$

$\ln |x + \sqrt{x^2-a^2}| + C;$

73. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} +$

$+ \frac{1}{2a^3} \operatorname{arcsec} \frac{x}{a} + C;$

74. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} +$

$+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$

75. $\int x\sqrt{a^2-x^2}\, dx = -\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + C;$

76. $\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} +$

$+ \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C;$

77. $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\, dx}{x} = \sqrt{a^2-x^2} +$

$+ a \ln \left| \frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \right| + C;$

78. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - $$
$$- \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

79. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

80. $$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C;$$

81. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + $$
$$+ \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

82. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C;$$

83. $$\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = $$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{bx+a^2}{a(x+b)} + C \quad (b>a);$$

84. $$\int \frac{dx}{(x+b)\sqrt{a^2-x^2}} = $$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\frac{x+b}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2+bx}\right| + $$
$$+ C \quad (b<a);$$

85. $$\int \frac{dx}{(x\pm a)\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a\mp x}{a\pm x}} + C;$$

86. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C;$$

87. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2} + $$
$$+ \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C;$$

88. $$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} + C;$$

89. $$\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}}{n+1} + $$
$$+ \frac{a^4n}{n+1}\int (a^2-x^2)^{\frac{n}{2}-1}\,dx;$$

90. $$\int x(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}+1}}{n+2} + C;$$

91. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C;$

92. $\int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{x^{m-1}}{m}\sqrt{a^2-x^2} +$

$+\frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}};$

93. $\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} +$

$+\frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2-x^2}}\right| + C.$

Интегралы от тригонометрических функций

1. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

2. $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

3. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

4. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$

5. $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C =$

$= \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C;$

6. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C =$

$= \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C;$

7. $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x +$

$+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx;$

8. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x +$

$+\frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$

9. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$

10. $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \sec x\,dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

14. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

15. $\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$

16. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C;$

17. $\int \sin x \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x + C;$

18. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C;$

19. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C;$

20. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C;$

21. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - \sin x + C;$

22. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

23. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C;$

24. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\sin x} + C = -\operatorname{cosec} x + C;$

25. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \cos x + C;$

26. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x - x + C;$

27. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C;$

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = -\frac{1}{\sin x} + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

29. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C;$

$$\left.\begin{array}{l}
31.\ \int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \\
\quad + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C; \\
32.\ \int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \\
\quad - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C; \\
33.\ \int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \\
\quad + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C;
\end{array}\right\} (m^2 \neq n^2)$$

34. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{a\sin x + b}{a + b\sin x} + C \quad (a^2 > b^2);$$

35. $$\int \frac{dx}{a + b\sin x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b + a\sin x - \sqrt{b^2 - a^2}\cos x}{a + b\sin x} \right| + C$$

$(b^2 > a^2)$;

36. $$\int \frac{dx}{a + b\cos x} =$$

$$= \mp \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \frac{a\cos x + b}{a + b\cos x} + C$$

$(a \geqslant 0; \quad b < 0)$;

37. $$\int \frac{dx}{a + b\cos x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} \right| +$$

$+ C \quad (a < b)$;

38. $$\int \frac{dx}{a + b\,\mathrm{tg}\,x} = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b\ln|a\cos x +$$

$+ b\sin x|) + C$;

39. $$\int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times$$

$$\times \ln \left| \frac{b\sin x - a\cos x + \sqrt{a^2 + b^2}}{a\sin x + b\cos x} \right| + C;$$

40. $$\int \frac{dx}{\sin^m x} = -\frac{1}{m - 1} \cdot \frac{\cos x}{\sin^{m-1} x} +$$

$$+ \frac{m - 2}{m - 1} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x};$$

41. $$\int \mathrm{tg}^m x\,dx =$$

$$= \frac{(\mathrm{tg}\,x)^{m-1}}{m - 1} - \int \mathrm{tg}^{m-2} x\,dx;$$

42. $$\int \mathrm{ctg}^m x\,dx =$$

$$= -\frac{(\mathrm{ctg}\,x)^{m-1}}{m - 1} - \int \mathrm{ctg}^{m-2} x\,dx;$$

$(m \neq 1)$ (для 41, 42)

43. $$\int \sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = \sec x + C;$$

44. $$\int \mathrm{cosec}\,x\,\mathrm{ctg}\,x\,dx = -\mathrm{cosec}\,x + C;$$

45. $$\int \cos^m x \sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m + n} +$$

$$+ \frac{m - 1}{m + n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx \quad (m < n);$$

46. $$\int \cos^m x \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m + n} +$$

$$+ \frac{n - 1}{m + n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx \quad (m > n).$$

47. $$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \frac{1}{n-1} \times$$
$$\times \frac{1}{\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x} +$$
$$+ \frac{m+n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x};$$

48. $$\int \frac{\cos^m x\, dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} -$$
$$- \frac{m-n+2}{n-1} \int \frac{\cos^m x\, dx}{\sin^{n-2} x} \quad (n \neq 1);$$

49. $$\int \frac{\cos^m x dx}{\sin^n x} = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} +$$
$$+ \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\cos^{m-2} x\, dx}{\sin^n x} \quad (m \neq n);$$

50. $$\int \sin x \cos^n x\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C;$$

51. $$\int \sin^n x \cos x\, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C;$$

52. $$\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg} x}{a} + C;$$

53. $$\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^{m-1}}{a^2} (ax \sin ax +$$
$$+ m \cos ax) - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2} \cos ax\, dx.$$

Интегралы от некоторых трансцендентных функций

1. $$\int e^x\, dx = e^x + C;$$

2. $$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln |a|} + C;$$

3. $$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + C;$$

4. $$\int x^n \ln x\, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right] + C;$$

5. $$\int e^{ax} \ln x\, dx = \frac{e^{ax} \ln x}{a} - \frac{1}{a} \int \frac{e^{ax}}{x}\, dx;$$

6. $$\int x^m \ln^n x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x -$$
$$- \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x\, dx;$$

7. $$\int \frac{x^m\, dx}{\ln^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\ln^{n-1} x} +$$
$$+ \frac{m+1}{n-1} \int \frac{x^m\, dx}{\ln^{n-1} x};$$

8. $$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C;$$

9. $$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C;$$

10. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$;

11. $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$;

12. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$;

13. $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C$;

14. $\int x e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$;

15. $\int x^n e^{ax}\,dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$;

16. $\int a^{mx} x^n\,dx = \dfrac{a^{mx} x^n}{m\ln a} -$

$- \dfrac{n}{m\ln a}\int a^{mx} x^{n-1}\,dx$;

17. $\int \dfrac{a^x\,dx}{x^m} = -\dfrac{a^x}{(m-1)x^{m-1}} +$

$+ \dfrac{\ln a}{m-1}\int \dfrac{a^x\,dx}{x^{m-1}}$.

2. Определенный интеграл

Определение интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

Геометрический смысл определенного интеграла (рис. 44)

$$\int_a^b f(x)\,dx = S_{aABb}.$$

Площадь в полярных координатах (рис. 45)

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi.$$

Объем тела вращения (рис. 46)

$$V = \pi\int_a^b y^2\,dx.$$

Несобственный интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx.$$

Пусть $f(x)$ – функция, имеющая бесконечный разрыв в точке x_0 ($a \leq x_0 \leq b$). Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{x_0-\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

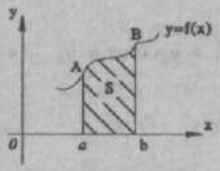


Рис. 44.

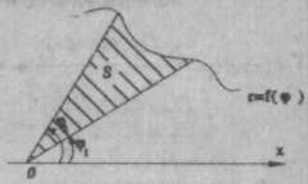


Рис. 45.

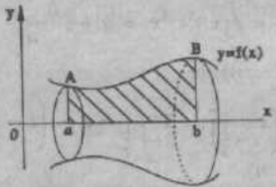


Рис. 46.

Приближенное интегрирование

Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}}\right).$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right).$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \right.$$

$$\left. + 2\left(y_{\frac{1}{2}} + y_{\frac{3}{2}} + \dots + y_{n-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

В этих формулах

n — число равных отрезков, на которые разбивается отрезок $[a, b]$;

$$y_i = f(x_i), \quad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n)$;

$$y_{i-\frac{1}{2}} = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad x_{i-\frac{1}{2}} = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}$$

$(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$.

3. Кратный интеграл

Двойной интеграл (рис. 47)

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Вычисление площадей и объемов с помощью двойного интеграла

$$S = \iint\limits_D dx\,dy;$$

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

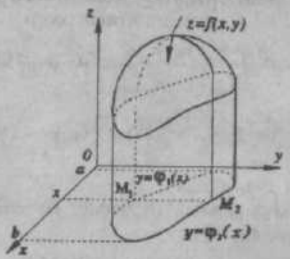


Рис. 47.

Момент инерции площади плоской фигуры относительно начала координат

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Координаты центра тяжести площади плоской фигуры

$$x_C = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy};\quad y_C = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy}.$$

Тройной интеграл

$$\iiint_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\varphi 1(x)}^{\varphi 2(x)} dy \int_{\psi 1(x,\ y)}^{\psi 2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz.$$

Момент инерции тела относительно координатных осей

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $\rho\,(x,\ y,\ z)$ — плотность вещества.

Координаты центра тяжести тела

$$x_C = \frac{1}{M}\iiint_V x\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$y_C = \frac{1}{M}\iiint_V y\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz;$$

$$z_C = \frac{1}{M}\iiint_V z\,\rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $M = \iiint_V \rho\,(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$ — масса тела.

4. Криволинейный интеграл

Криволинейный интеграл по длине дуги (рис. 48)

$$\int_{\cup AB} f(x,\ y)\,ds = \int_a^b f\,[x,\ \varphi\,(x)]\,\sqrt{1 + [\varphi'\,(x)]^2}\,dx.$$

Криволинейный интеграл по координатам

$$\int\limits_{\cup AB} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} X\,[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\varphi'(t)\,dt +$$

$$+ Y\,[\varphi(t),\ \psi(t)]\,\psi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ – уравнения кривой AB.

Вычисление площади области, ограниченной кривой, через криволинейный интеграл по этой кривой

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\cup AB} x dy - y dx.$$

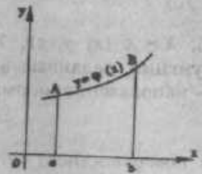


Рис. 48.

Вычисление работы переменной силы $\overline{F} = X(x,\ y)\,\overline{i} + Y(x,\ y)\,\overline{j}$ на криволинейном пути L

$$A = \int\limits_{L} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy.$$

Формула Грина

$$\int\limits_{L} X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

где D — плоская область; L — контур этой области.

5. Поверхностный интеграл

Определение интеграла

$$\iint\limits_{\sigma} [X\cos(n,\ x) + Y\cos(n,\ y) + Z\cos(n,\ z)]\,d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} X\,dy\,dz + Y\,dx\,dz + Z\,dx\,dy,$$

где σ — поверхность; $X = X(x,\ y,\ z)$, $Y = Y(x,\ y,\ z)$, $Z = Z(x,\ y,\ z)$ — функции, заданные в каждой точке поверхности σ; n — направление нормали к поверхности.

Вычисление поверхностного интеграла

$$\iint\limits_{\sigma} Z\cos(n,\ z)\,d\sigma = \pm\iint\limits_{D} Z\,[x,\ y,\ f(x,\ y)]\,dx\,dy,$$

где D — проекция поверхности σ на плоскость xOy, $z = f(x,\ y)$ — уравнение поверхности σ.

Знак плюс или минус перед двойным интегралом берется в зависимости от того, будет ли $\cos(n,\ x)$ положительным или отрицательным.

6. Формула Остроградского

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{dy} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_\sigma [X \cos(n,\ x) + Y \cos(n,\ y) +$$

$$+ Z \cos(n,\ z)]\,d\sigma,$$

где V — область, ограниченная замкнутой поверхностью σ.

XI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Общий вид дифференциального уравнения

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

где n — порядок уравнения.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение с разделенными переменными

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0.$$

Общее решение

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C.$$

Уравнение с разделяющимися переменными

$$M_1(x)\,N_1(y)\,dx + M_2(x)\,N_2(y)\,dy = 0.$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделенными переменными делением на выражение $N_1(y)\ M_2(x)$.

Однородное уравнение

$$M(x,\ y)\,dx + N(x,\ y)\,dy = 0.$$

Уравнение будет однородным, если $M(x,\ y)$ *и* $N(x,\ y)$ — одного и того же измерения, т. е.

$$M(tx,\ ty) = t^k M(x,\ y);$$

$$N(tx,\ ty) = t^k N(x,\ y).$$

С помощью подстановки $y = ux$ однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейное уравнение

Линейное уравнение без правой части (однородное)

$$y' + P(x)\,y = 0.$$

Общее решение

$$y = Ce^{\int -P\,dx}$$

Линейное уравнение с правой частью (неоднородное)

$$y' + P(x)\,y = Q(x).$$

Общее решение

$$y = e^{-\int P\,dx}\left(C + \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx\right).$$

Уравнение Бернулли

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^n \quad (n \neq 0, \quad n \neq 1).$$

Это уравнение с помощью подстановки $z = y^{-n+1}$ сводится к линейному.

Уравнение в полных дифференциалах

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0,$$

если $\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Общее решение

$$\int\limits_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C.$$

3. Дифференциальные уравнения второго и высших порядков

Некоторые случаи понижения порядка

Уравнение не содержит y, т. е. имеет вид

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Подстановка $p = y'$ понижает на единицу порядок этого уравнения.

Уравнение не содержит x, т. е. имеет вид

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Для понижения порядка в качестве неизвестной функции берется $p = y'$, а в качестве аргумента — y. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,p.$$

Таким же образом находится y''' и т. д.

Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Линейное уравнение без правой части (однородное)

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Если характеристическое уравнение имеет два неравных действительных корня r_1 и r_2, то общее решение линейного уравнения

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x};$$

если $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$, то

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{p}{2}x};$$

если $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$, то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Линейное уравнение с правой частью (неоднородное)

$$y'' + py' + qy = f(x).$$

Общее решение есть сумма частного решения данного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Если правая часть $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x],$$

то частное решения находится по формуле

$$y = x^k e^{\alpha x} [R_1(x) \cos \beta x + R_2(x) \sin \beta x],$$

где $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены степени, равной высшей из степеней многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, а k — кратность, с которой выражение $(\alpha \pm \beta i)$ входит в число корней характеристического уравнения.

XII. РЯДЫ

1. Числовые ряды

Числовой ряд

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k.$$

Этот ряд сходится, если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$ — частичная сумма.

Необходимое условие сходимости ряда

$$\lim_{k\to\infty} U_k = 0.$$

Признак Даламбера

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{U_{k+1}}{U_k}\right| = q.$$

При $q < 1$ ряд сходится; при $q > 1$ ряд расходится; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым, т. е. ряд может как сходиться, так и расходиться.

Интегральный признак Коши

Пусть $f(x)$ — такая функция, что $f(k) = U_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ с положительными членами сходится, если существует несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$, и расходится в противном случае.

Признак сходимости знакочередующегося ряда

Знакочередующийся ряд $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} U_k$ сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty} U_k = 0$ и $U_k > U_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Абсолютная и условная сходимости

Ряд с произвольными членами $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ сходится абсолютно, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |U_k|$ расходится, то первый ряд называется условно сходящимся.

Операции над абсолютно сходящимися рядами

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \sum_{k=1}^{\infty} (U_k \pm V_k);$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_p \sum_{k=1}^{\infty} V_k = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k,$$

где

$$\omega_k = U_1 V_k + U_2 V_{k-1} + \ldots + U_k V_1.$$

2. Функциональные ряды

Функциональный ряд

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x).$$

Этот ряд сходится при $x = a$, если сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(a)$.

Область сходимости функционального ряда — это множество тех значений x, при которых ряд сходится.

3. Степенные ряды

Областью сходимости степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_kx^k$$

является промежуток $(-R, R)$, где R — радиус сходимости.

$$R = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) \right]' = \sum_{k=1}^{\infty} U'_k(x);$$

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} U_k(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} U_k(x)\, dx.$$

Радиус сходимости этих рядов, полученных почленным дифференцированием и интегрированием, остается без изменения.

Ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Биномиальный ряд

$$(1 + x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \ldots + C_m^n x^n + \ldots,$$

где

$$C_m^n = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}.$$

При m целом и положительном ряд конечен, а в противном случае — бесконечен. Ряд сходится в промежутке $(-1, +1)$.

Частные случаи этого ряда

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

сходится при условии $-1 < x < 1$;

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

сходится при условии $-1 < x < 1$;

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \dots$$

сходится при условии $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + \dots$$

сходится при условии $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Разложение в степенной ряд элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

сходится при всех значениях x;

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \frac{(\ln a)^3}{3!}x^3 + \dots$$

сходится при всех значениях x;

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

сходится при всех значениях x;

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

сходится при всех значениях x;

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

сходится при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$;

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{45}x^3 + \frac{2}{945}x^5 + \frac{2}{4725}x^7 + \dots\right)$$

сходится при $-\pi < x < \pi$;

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \dots$$

сходится при $-1 < x < 1$;

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

сходится при $-1 < x < 1$;

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \dots\right]$$

сходится при всех положительных значениях x;

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + $$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots$$

сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots = -\operatorname{sh}(-x);$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots = \operatorname{ch}(-x).$$

Степенные ряды функций комплексного переменного $z = x + iy$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + \frac{1}{n!}z^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!};$$

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \ldots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n!)}z^{2n} + \ldots$$

Формулы Эйлера

$$e^{zi} = \cos z + i\sin z;\quad e^{-zi} = \cos z - i\sin z;$$

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2};\quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

4. Тригонометрические ряды

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{aligned}\right\}\ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

Если $f(x)$ — периодическая с периодом 2π кусочно-монотонная и ограниченная на отрезке $[-\pi,\ \pi]$ функция, то ряд Фурье, построенный для этой функции, сходится во всех точках.

Если x — точка непрерывности такой функции $f(x)$, то

$$S(x) = f(x),$$

где $S(x)$ — сумма ряда Фурье функции $f(x)$.

Если x — точка разрыва, то

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

где $f(x-0)$ и $f(x+0)$ — пределы слева и справа функции $f(x)$.

XIII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

1. Случайные события

Относительная частота

$$\omega = \frac{m}{n},$$

где m — число случаев наступления события (частота); n — общее число испытаний.

Классическое определение вероятности

$$P(A) = \frac{M}{N},$$

где M — число случаев, благоприятствующих событию A; N — общее число равновозможных и попарно несовместимых случаев.

Основные свойства вероятностей

$$0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$P(u) = 1,$$

где u — достоверное событие;

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

есть правило сложения вероятностей несовместимых событий.

Полная система событий

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1,$$

если $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную систему событий.

Вероятность противоположного события

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Условная вероятность

$$P(B/A) = \frac{P(A \text{ и } B)}{P(A)}.$$

Общее правило умножения вероятностей

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B).$$

Правило умножения вероятностей независимых событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\,P(B).$$

Общее правило сложения вероятностей

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B).$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)\,P(A/B_1) + P(B_2)\,P(A/B_2) + \dots + P(B_n)\,P(A/B_n),$$

где $B_1, B_2, \dots, B_n$ — попарно несовместимые события, причем событие A может осуществиться только с одним из них.

Формула вероятностей гипотез (формула Бейеса)

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\,P(A/B_i)}{P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n)}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$.

2. Случайные величины

Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$$

Плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Свойства плотности распределения вероятностей

$$f(a) \geqslant 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Вероятность попадания в заданный интервал (рис. 49)

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Математическое ожидание

$$M(X) = \sum_i x_i p_i$$

(для дискретной случайной величины);

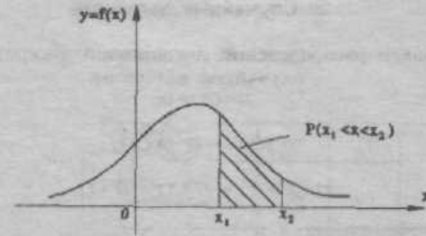


Рис. 49.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

(для непрерывной случайной величины; здесь $f(x)$ — плотность вероятности).

Свойства математического ожидания

$$M(C) = C,$$

где C — постоянная;

$$M(CX) = CM(X);$$

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$$

для любых X и Y;

$$M(XY) = M(X)\,M(Y)$$

для независимых X и Y.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

$$D(X) = M(X-a)^2 = M(X^2) - a^2 \quad (M(X) = a);$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Свойства дисперсии

$$D(C) = 0;$$

$$D(CX) = C^2 D(X);$$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

для независимых X и Y.

Моменты распределения

Начальный момент порядка k

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральный момент порядка k

$$\mu_k = M(X-a)^k \quad (M(X) = a).$$

3. Некоторые законы распределения вероятностей

Биномиальный закон

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, p^m q^{n-m},$$

где $P_n(m)$ — вероятность того, что при n независимых испытаниях событие наступит m раз; p — вероятность наступления события при каждом отдельном испытании; $q = 1-p$ — вероятность противоположного события.

Наивероятнейшее число наступлений события

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Локальная теорема Лапласа

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\, \varphi(x),$$

где

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Интегральная теорема Лапласа

$$P_n(a \le m \le b) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx,$$

где

$$x_1 = \frac{a-np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}}.$$

Закон Пуассона

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a},$$

где $a = M(X) = \sigma_x$.

Нормальный закон

Случайная величина X имеет нормальное распределение, если ее плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{1}{2(x-a)^2}},$$

где $a = M(X)$, $\sigma = \sigma_x$.

Кривая Гаусса (рис. 50)

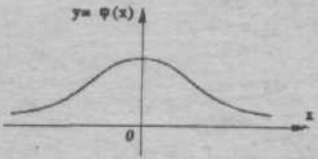


Рис. 50.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Интеграл вероятностей

$$\Phi(t) = 2\int_0^t \varphi(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right];$$

$$P(|X - a| < \varepsilon) = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

КАРМАННЫЙ СПРАВОЧНИК

В сборник вошли формулы элементарной и высшей математики — арифметики и алгебры, геометрии и тригонометрии, векторной и линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчисления, рядов, теории вероятностей и математической статистики.

- ✓ школьникам
- ✓ абитуриентам
- ✓ студентам
- ✓ преподавателям

ISBN 5-88782-281-3

9 785887 822815 >

ПИТЕР®